

Modelo de controle alocativo de Análise Envoltória de Dados (DEA) para avaliar sistemas de controle de estoque quando há relação entre as variáveis

Allocative control Data Envelopment Analysis (DEA) model to evaluate inventory control systems when there is a relationship among variables

Paulo Nocera Alves Junior¹ - Univ. de São Paulo - Escola de Eng. de São Carlos - Dep. de Eng. de Produção
Isotilia Costa Melo² - Univ. de São Paulo - Escola de Eng. de São Carlos - Dep. de Eng. de Produção
Gabriela Celestini³ - Univ. de São Paulo - Escola de Eng. de São Carlos - Dep. de Eng. de Produção
Daisy Aparecida do Nascimento Rebelatto⁴ - Univ. de São Paulo - Escola de Eng. de São Carlos - Dep. de Eng. de Produção

RESUMO O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo de controle alocativo de Análise Envoltória de Dados (DEA) para medir a eficiência de sistemas com variáveis que têm relação entre si, como os sistemas de controle de estoque. O modelo estático proposto inclui variáveis intermediárias (uma classe comum de variáveis em modelos dinâmicos). O modelo é aplicado a 647 empresas (*Decision Making Units* - DMU) das Américas do Sul e do Norte (principalmente EUA, Brasil, e Chile), considerando seus sistemas produção-estoque com dados de variáveis contábeis. O modelo minimiza os custos de produção e de estoque para calcular a eficiência alocativa. O *output* é a demanda; o *input* é a produção, e a variável intermediária é o estoque. Seus custos são considerados na função objetivo. É acrescentada uma restrição variacional da Teoria do Controle Ótimo (OCT) para descrever a relação entre demanda, produção e estoque. Em resumo, o modelo calcula a eficiência prevenindo a possibilidade de uma projeção que ignora a relação entre as variáveis. O modelo proposto é relevante, pois essa relação sempre ocorre na prática em sistemas de controle de estoque.
Palavras-chave: Eficiência alocativa. Variável intermediária. Análise Envoltória de Dados. Restrição variacional. Teoria do Controle Ótimo.

ABSTRACT *The purpose of this paper is to present an allocative control Data Envelopment Analysis (DEA) model to measure the efficiency of systems with variables that have a relationship to each other, such as inventory control systems. The static model includes intermediate variables (a common variable class in dynamics models). It is applied to 647 companies (Decision Making Units – DMU) from South and North America (mainly USA, Brazil, and Chile), considering their production inventory systems with data from accounting variables. The model minimizes the inventory and production costs to calculate allocative efficiency. The output is demand, the input is production, and the intermediate variable is inventory. Their costs are in the objective function. There is a variational constraint from Optimal Control Theory (OCT) to describe the relationship between demand, production, and inventory. In summary, the model calculates the efficiency preventing the possibility of a projection that ignores the relationship between these variables. The proposed model is relevant because this relationship always occurs in a practical sense in inventory control systems.*
Keywords: Allocative efficiency. Intermediate variable. Data Envelopment Analysis. Variational constraint. Optimal Control Theory.

1. Avenida Trabalhador são-carlense, 400, CEP: 13566-590, São Carlos - SP, pjnocera@yahoo.com.br; 2. isotilia@gmail.com; 3. gcelestini@gmail.com; 4. daisy@sc.usp.br

JUNIOR, P. N. A.; MELO, I. C.; CELESTINI, G.; REBELATTO, D. A. N. Modelo de controle alocativo de Análise Envoltória de Dados (DEA) para avaliar sistemas de controle de estoque quando há relação entre as variáveis. **GEPROS. Gestão da Produção, Operações e Sistemas**, Bauru, Ano 13, nº 1, jan-mar/2018, p. 143-160.

DOI: 10.15675/gepros.v13i1.1990

1. INTRODUÇÃO

A Análise Envoltória de dados (DEA) é um método não paramétrico de programação matemática usada para medir a eficiência relativa de Unidades Tomadoras de Decisão (DMUs) em um sistema com múltiplas variáveis de entrada e de saída (respectivamente *inputs* e *outputs*).

Com o desenvolvimento da DEA, outras características foram incorporadas, como as medidas intermediárias ou variáveis de ligação (*carry-over*) (LIANG, COOK, ZHU, 2008; TONE, TSUTSUI, 2010, 2014; KAO, HWANG, 2010; DESPOTIS, KORONAKOS, SOTIRO, 2016). Essas sempre estão associadas a modelos dinâmicos, de rede, ou de dois estágios, sendo que, tratando-se especificamente de estoque, é um dos cinco fatores mais comuns, a que se atribui a interdependência temporal entre diferentes períodos, no contexto de eficiência dinâmica (FALLAH-FINI, TRIANTIS; JOHNSON, 2014).

Para reforçar essa associação, foram feitas buscas na base de dados *Web of Science*, em junho de 2016, com o termo *data envelopment analysis*, refinando as buscas com as palavras *carry-over*, *link variable*, *intermediate variable*, *intermediate measure*, ou *intermediate measurement*, e excluindo as palavras *dynamic*, *two-stage* e *network*. Foram encontrados apenas 3 artigos, sendo que o artigo de Hatefi et al.(2009) trata da eficiência, em uma cadeia de suprimentos, do ponto de vista do comprador, do vendedor, e da cadeia de suprimentos como um todo, ou seja, uma *network*; já o de Chen et al. (2006) trata da eficiência de um processo que também é medido ao longo de mais de um estágio.

Apenas o de Sueyoshi e Goto (2014) pode realmente ser considerado um modelo estático (padrão), mas o que é chamado de *intermediate measurement* refere-se a uma medida com orientação intermediária do modelo, calculada com base na média ponderada entre duas medidas de ineficiência (uma para *inputs* e outra para *outputs*, sendo estes indesejáveis ou não), visando a incorporar em modelos radiais características de modelos não radiais, que não necessitam de uma orientação específica (como o SBM). Ou seja, não é um modelo que leva em consideração a classe de variáveis de ligação ou de medidas intermediárias da maneira como é considerada na literatura sobre *dynamic/network/two-stage* DEA.

Dado o contexto apresentado, o objetivo deste estudo é incorporar a classe de medidas intermediárias entre as variáveis de modelos estáticos. Para isso, será levado em consideração um tipo de restrição chamada variacional (ou de diferença de estado) considerada no modelo dinâmico de Sengupta (1999), que advém da Teoria do Controle Ótimo (OCT) e permite relacionar variáveis sem criar pontos de *network*, portanto, pode também ser incluída em modelos estáticos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. Eficiência

Segundo Farrel (1957), eficiência pode ser dividida em eficiência total, técnica ou alocativa. A eficiência técnica reflete à obtenção do máximo de *outputs* com o mínimo de *inputs*, ou seja, encontra a eficiência otimizada (melhores conjuntos de peso) de cada DMU. Já a alocativa mede a eficiência em se alocar uma proporção ótima de *inputs* para atender os *outputs*, dados os seus preços, ou seja, calcula a eficiência, mas foca em minimizar custos. A eficiência total é a combinação multiplicativa entre a eficiência técnica e a alocativa (FERREIRA; GOMES, 2009). A DEA calcula os melhores pesos não arbitrário para uma DMU e uma única medida de desempenho relativa (eficiência relativa) entre 0 e 1 para cada DMU, gerando uma fronteira de eficiência, onde as DMUs que obtêm valor igual a 1 são consideradas eficientes.

De acordo com Zhu (2003) e Hatefi et al. (2009), o cálculo de eficiência usando variáveis de ligação como *inputs* ou *outputs*, sem analisar o contexto, pode levar a um resultado falho que não condiz com realidade. No caso específico de sistemas produção-estoque, quando se quer calcular a eficiência técnica, considerando estoque como uma variável intermediária livre, pode acontecer que todas as DMUs obtenham eficiência máxima, pois a relação entre as variáveis (demanda + estoque final) / (produção + estoque inicial) é constante e igual a 1, então qualquer relação de pesos iguais leva à eficiência 1.

Para contornar este problema de relação entre as variáveis, o modelo proposto é alocativo, sendo a função objetivo construída com base nos custos, de forma semelhante ao custo de ajustamento do modelo OCT de Thompson e Sethi (1980), mas sem penalização, e DEA de Sengupta (1999), pois assim essa relação deixa de ser constante.

Outro ponto a ser observado é a respeito da homogeneidade das DMUs. Uma das características que Golany e Roll (1989) apontam para que um grupo de DMUs seja considerado homogêneo é que as variáveis (tanto *inputs* como *outputs*) sejam idênticas para todas as DMUs, exceto por diferenças de intensidade e magnitude.

Hua e He (2006) fizeram um estudo sobre DEA aplicado em DMUs não homogêneas e sugerem que uma das condições para que as DMUs sejam consideradas homogêneas para tecnologia é que utilizem recursos similares.

Um dos problemas de se utilizar DMUs heterogêneas é aparecerem muitas DMUs empatadas entre as mais eficientes (COOK, KRESS, e SEIFORD, 1992). Segundo os autores, se grupo homogêneos de DMUs, mas heterogêneos entre si, forem comparados usando DEA, pode acontecer de um grupo ser superior aos outros em todos os aspectos e ser responsável pelo maior número de empates.

Neste estudo, mesmo que as DMUs não tenham as mesmas funções ou não atuem sob as mesmas condições de mercados (pois são de setores e países diferentes), as variáveis são as mesma para todas as DMUs, e os resultados não apresentaram problemas de empate ou de setores ou países possuírem todas as DMUs superiores às de outros, então foi feita uma comparação global.

2.1.1. Análise Envoltória de Dados (DEA)

O primeiro modelo DEA, chamado CCR, foi criado por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), baseado no trabalho de Farrell (1957) sobre mensuração da eficiência produtiva. Este modelo era orientado ao *input* e originalmente de Programação Fracionária, uma técnica de Pesquisa Operacional (PO).

A forma linear do modelo CCR, conhecido como o modelo CCR na forma dos multiplicadores, orientado ao *inputs*, com fronteira padrão; é obtida por meio da transformação de Charnes e Cooper (CHARNES e COOPER, 1962, 1973; CHARNES, COOPER e RHODES, 1978; TONE, 2001). Cada modelo primal na forma linear dos multiplicadores tem o seu respectivo dual, por exemplo, o modelo CCR orientado ao *input* na forma do envelope, é formulado da seguinte maneira, conforme é dado pela Equação (1):

$$\begin{aligned}
 & \min \theta - \varepsilon \left[\sum_{i=1}^m S_i^+ + \sum_{j=1}^n S_j^- \right] \\
 & \text{s.t.: } \sum_{k=1}^w \lambda_k x_{jk} + S_j^- - \theta x_{j0} = 0; \quad j=1,2,\dots,n \\
 & \sum_{k=1}^w \lambda_k y_{ik} + S_i^- = y_{i0}; \quad i=1,2,\dots,m \\
 & \lambda_k \geq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Onde θ é a eficiência da DMU analisada; λ_k é a contribuição da k -ésima DMU para a meta da DMU analisada; y_{i0} é a quantidade do i -ésimo *output* da DMU analisada; x_{j0} é a quantidade do j -ésimo *input* da DMU analisada; y_{ik} é a quantidade do i -ésimo *output* da k -ésima DMU; x_{jk} é a quantidade do j -ésimo *input* da k -ésima DMU; m é o número de *outputs* analisados; e n é o número de *inputs* analisados.

Essa formulação dual permite encontrar as folgas das variáveis e identificar quais DMUs servem como *benchmarks*, ao em vez de encontrar os pesos como na formulação primal. Além desse modelo para eficiência técnica, existem modelos chamados de alocativos, para se medir a eficiência econômica, de custos, de receita, ou de lucro.

Segundo Ferreira e Gomes (2009), quando se conhece a razão entre os custos dos *inputs* ou o preço dos *outputs*, pode-se calcular a eficiência alocativa. Esta vem do resultado da minimização de custos ou maximização da receita (ou do lucro) em comparação com os custos ou preços observados. O modelo de minimização de custos mais simples é formulado conforme é dado pela Equação (2), a partir do modelo CCR dual orientado ao *input*:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{j=1}^n c_j x_{j0}^p \\
 & \text{s.t.: } \sum_{k=1}^w \lambda_k x_{jk} + S_j^- - x_{j0}^p = 0; \quad j=1,2,\dots,n \\
 & \sum_{k=1}^w \lambda_k y_{ik} - S_i^+ = y_{i0}; \quad i=1,2,\dots,m \\
 & \lambda_k \geq 0, x_{j0}^p \geq 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

Sendo a eficiência alocativa (θ_{ea}) calculada posteriormente como $\theta_{ea} = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_{j0}^{p*}}{\sum_{j=1}^n c_j x_{j0}}$, onde: x_{j0}^{p*} é a quantidade ótima de *inputs*, x_{j0} é a quantidade observada de *inputs* e c_j é o custo observado.

2.2. Teoria do Controle Ótimo (OCT)

A OCT, assim como outras técnicas de PO, consiste de modelos com uma função objetivo a ser otimizada, sujeita a restrições, mas otimizando uma função com base em uma variável de controle (e uma variável de estado que varia conforme o controle). No controle contínuo, a função objetivo é um funcional com integral e uma das restrições é variacional com uma derivada. Também existe o controle a tempo discreto, assim como as aproximações, discretizações das funções contínuas, e as resoluções por métodos numéricos.

Para o cálculo da eficiência alocativa, será utilizada uma restrição variacional de diferença igual à usada nos modelos de Thompson e Sethi (1980) e Holt et al. (1960), mas considerando apenas um único período.

Um dos modelos da OCT a tempo discreto é dado pela Equação (3), descrito por Sethi e Thompson (2006), consiste em uma função objetivo J escrita para minimizar a soma custos associados à produção e à estocagem no período t , dado um estoque inicial $I(0) = I_0$, e sujeita à condição da equação de diferença de estado, que representa a variação do estoque (diferença entre a produção P e a demanda S).

$$\begin{aligned} \max J &= \sum_{t=0}^r - [h(I(t)) + c(P(t))] \\ \text{s.t.: } &\begin{cases} P(t) = S(t) + I(t) - I(t-1); & t=1,2,\dots,T \\ I(0) = I_0 \\ I(T) \geq I_{\min} \\ P_{\min} \leq P(t) \leq P_{\max} \\ I(t) \geq 0, P(t) \geq 0, S(t) \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

A função objetivo de custo J pode ser interpretada da seguinte maneira: T é o último período do horizonte de tempo analisado, $hI(t)$ é o custo de estocagem, $cP(t)$ é o custo de produção, $I(t)$ é a função de estoque ao longo do tempo, I_0 é o estoque inicial do primeiro período ($t=0$), $I(T)$ é o nível de estoque mínimo que deseja-se no último período T do horizonte de tempo analisado, e $P(t)$ é a função de produção ao longo do tempo, que deve respeitar o intervalo $[P_{\min}; P_{\max}]$.

Este modelo pode ser resolvido por programação linear (assim como DEA), de modo mais rápido e simples do que a versão não-linear. Portanto, a restrição adicionada ao modelo proposto é $I(t)-I(t-1)=P(t)-S(t)$, com $I(0)=I_0$. Como o modelo proposto consiste em analisar apenas um período, será uma única restrição $I-I_0=P-S$, a partir da restrição dada pela Equação (3). Já a função objetivo, que consiste na minimização de custo, se dá também por encontrar a produção ótima, ou seja, otimizando a variável de controle, pois a variável intermediária de estado (estoque) também será ótima quando o controle e os custos forem ótimos.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O método de pesquisa possui uma abordagem quantitativa e emprega-se modelagem para descrever o funcionamento de um sistema a partir de modelos matemáticos (MIGUEL, 2010).

3.1. Objeto de estudo

O objeto de estudo são empresas com dados iniciais e finais do primeiro trimestre de 2016. Este período foi escolhido por ser o mais recente disponível com dados consolidados e as empresas já fazerem demonstrações financeiras segundo o método contábil descrito nas normas internacionais de contabilidade (*International Financial Reporting Standards - IFRS*).

3.2. Procedimentos de coleta de dados

A amostra de dados foi tomada de forma não aleatória, considerando todas as DMUs com dados trimestrais cadastrados no *software* Economática (incluindo empresas das Américas do Sul e do Norte, principalmente dos EUA, Brasil, e Chile), o período considerado é o primeiro trimestre de 2016, sendo que os dados iniciais deste período iguais aos dados finais do quarto trimestre de 2015 (para cálculo do custo médio de estoque e uso do estoque inicial no primeiro trimestre de 2016). Este período foi escolhido por ser o mais recente com dados consolidados e as empresas já fazerem demonstrações financeiras segundo o método contábil descrito nas normas internacionais de contabilidade (*International Financial Reporting Standards - IFRS*).

Como o propósito do trabalho é analisar o sistema de controle de estoque das empresas, foram excluídas da análise os setores de finanças e seguros, *software* e dados, fundos, assim como os setores ligados à prestação de serviços, como os setores de energia elétrica, transportes, telecomunicações, e a categoria outros. As DMUs que continham dados negativos, iguais a zeros, não informados, ou que por algum motivo constavam como fora dos padrões internacionais (com exceção dos EUA, pois foi considerado que o método utilizado pelas empresas norte americanas era semelhante aos padrões internacionais), também foram excluídas. No final, foram analisadas 647 empresas de 14 setores.

As descrições das variáveis e parâmetros utilizados no modelo DEA, e de acordo com a OCT, podem ser vistos na Tabela 1:

Tabela 1 – Descrição de funções, variáveis e parâmetros.

Funções, variáveis e parâmetros:	Descrições:	Funções, variáveis e parâmetros:	Descrições:
J	Função objetivo (função custo);	I_0	Estoque inicial (estoque do período 0 no tempo 1);
t	Tempo;	R	Receita;
λ	Contribuição da DMU para Ef.;	C_p	Custo unitário de produção;
D	Demanda (<i>output</i> exógeno);	C_f	Custo unit. de estoque (final);
P	Produção (<i>input</i> de controle);	C_i	Custo un. de estoque (inicial);
E(t)	Estoque em t (variável intermediária de estado);	C_d	Custo unitário da produção vendida;
E^+	Estoque final ou estoque em t (ligação de <i>output</i>);	CR	Custo relativo;
E^-	Estoque inicial ou estoque em t-1 (ligação de <i>input</i>);	CPP	Custo de Produção (ou de Compra) do Período;
$\lambda(t)$	Contribuição das DMUs para a DMU analisada;	CEF	Custo de Estoque Final;
S^+	Folga do <i>output</i> (ou ligação de <i>output</i>);	CEI	Custo de Estoque Inicial;
S^-	Folga do <i>input</i> (ou ligação de <i>input</i>);	CVP	Custo do Produto Vendido.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Seguindo a classificação de variáveis de Tone e Tsutsui (2010), classificam-se as do modelo como: Produção, *input*, Demanda, *output*, e Estoque, medida intermediária, sendo esta do tipo livre. Como a variável de ligação intermediária é livre, esta pode ser dividida em duas variáveis, uma para ligação de *output* (estoque final do período t) e outra para ligação de *input* (estoque inicial do período t-1).

É importante observar que, por se tratar de um modelo alocativo, os custos dos *inputs* (e das variáveis intermediárias) fazem parte da função objetivo, não sendo incluídos diretamente como uma variável *input*.

3.3. Procedimentos de análise de dados

Os relatórios contábeis contêm custos totais, então não é possível obter diretamente os custos unitários e quantidades. Como DEA é invariante à escala, então, por exemplo, não importa se os custos de produção e estocagem foram respectivamente \$10,00 e \$20,00 para gerar uma receita de \$60,00, ou \$100,00 e \$200,00 para gerar \$600,00. O que importa é que um custo seria metade do outro e a receita, o dobro das soma dos custos, portanto, foi utilizado como medida financeira o custo relativo (CR) para se gerar \$1,00 de receita (R=1). Para obter-se este custo e os demais valores necessários, foram feitas estimativas acerca dos custos unitários e quantidades relativas, a partir dos dados informados nos relatórios.

Como estão disponíveis os valores de Receita, custos de produtos vendidos (CPV) e estoques (CE), que podem ser divididos em custos de estoque final (CEF) e estoque inicial (CEI), então utilizou-se a fórmula do CPV, descrita por Araújo e Neto (2010), para o cálculo de ComPras do Período (CPP), no caso de comércios, que, neste artigo, será considerado para o Custo de Produção do Período (CPP) em setores industriais (pois nos relatórios contábeis não há diferenciação entre os tipos de estoques, considerando todos), da seguinte maneira, conforme dado pela Equação (4):

$$CPP=CPV+CEF-CEI \quad (4)$$

Considerando que estes custos dados pela Equação (4) podem ser decompostos em custos médios unitários e quantidades (e a receita em receita unitária R e demanda D):

$$\text{Custo} = \text{CustoUnitário} * \text{Quantidade}$$

Então teríamos:

$$\text{Receita} = R * D; \text{CPV} = C_d * D; \text{CEF} = C_f * E_f; \text{CEI} = C_i * E_i; \text{CPP} = C_p * P.$$

E o CR pode ser calculado assim:

$$\text{CR} = \text{CPV} / \text{Receita} = C_d * D / (R * D) = C_d / R. \text{ Para } R=1, C_d=\text{CR}.$$

Para engenharia, pode-se estimar os custos de estocagem com base no estoque médio do período $C(E^+ + E^-)/2$ (GODINHO FILHO, FERNANDES, 2010), e sua soma é equivalente às quantidades finais e iniciais de estoques, incorrendo em custos médios, lembrando que o estoque final de um período é igual ao estoque inicial do próximo período:

$$\sum_{g=1}^T C_d_g \frac{(E_g^+ + E_g^-)}{2} = C_d_1 \frac{E_1^-}{2} + \sum_{g=1}^{T-1} E_g^+ \frac{(C_d_g + C_d_{g+1})}{2} + C_d_T \frac{E_T^+}{2}$$

Então para estimar C_f e C_i dos períodos intermediários (1 a T-1), foi considerado que eles são proporcionais à média de CR:

$$C_f_g \frac{(C_d_g + C_d_{g+1})}{2}, \quad g=1, \dots, T \quad \text{e} \quad C_i_g \frac{(C_d_{g-1} + C_d_g)}{2}, \quad g=1, \dots, T \quad (5)$$

Podendo os custos Cd_0 e Cd_{T+1} , quando necessário, ser estimados respectivamente como Cd_1 e Cd_T , ou excluir o primeiro e o último período da análise, para não ter que estimá-los. No caso deste artigo, será considerado $Cd_{T+1} = Cd_T$ (Cd do primeiro trimestre de 2016) e Cd_0 como o Cd do quarto trimestre de 2015. Após calcular os custos de estocagem, pode-se obter os valores das variáveis intermediárias (estoques finais e iniciais):

$$z^+ = E^+ = CEF/Cf \quad e \quad z^- = E^- = CEI/Ci \quad (6)$$

Os valores dos *outputs* (demanda, proporcional à receita) e dos *inputs* (produção):

$$y = D = CPV/Cd \quad e \quad x = P = y + z^+ - z^- \quad (7)$$

Já o custo médio unitário de produção pode ser calculado como:

$$Cp = CPP/x \quad (8)$$

3.4. Modelo proposto

Assim como o alocativo, o modelo proposto, DEA de controle alocativo, considera a minimização de custos, somando-se os custos de produção e estoques (final e inicial) do período analisado. Para estudar a relação entre demanda, produção e estoque, o proposto incorpora a restrição do modelo OCT de Thompson e Sethi (1980) e Holt et al. (1960).

Para contemplar características dos modelos mais recentes, é importante incorporar variáveis intermediárias, que fazem uma ligação entre os períodos. Uma das características dessas variáveis é que, embora algumas possam ser consideradas como indesejáveis (e tratadas como *inputs*) ou desejáveis (e tratadas como *outputs*), no geral, a ligação pode ser considerada livre e elas são tratadas como *inputs* e *outputs* ao mesmo tempo.

No caso proposto, pela própria natureza de sistemas de controle de estoque, a variável intermediária é livre, podendo ser tratada como um *output* de um período (é desejável se ter uma quantidade mínima dele para não incorrer em custos de falta ou para não aumentar tal risco) e que o *output* do período anterior será utilizado como um *input* desse período em análise (é indesejável no caso de existir um excesso, como é comum de acontecer na prática). Além disso, a variável intermediária estoque tem uma relação direta com o *input* (produção) e o *output* (demanda), e esta relação pode ser descrita com uma equação de diferença de estado.

A função objetivo do modelo proposto é semelhante à dos modelos supracitados (SENGUPTA, 1999; THOMPSON; SETHI, 1980; SETHI; THOMPSON, 2006; Holt et al., 1960), mas sem penalização apenas um período de análise, com restrição de valor inicial, e considerando custo relativo (de estocagem e produção) para se gerar \$1,00 de receita.

Quanto às restrições, a restrição variacional considerada é a variação de estoque, acrescentando as restrições de ligação do modelo de Tone e Tsutsui (2010). Como o custo relativo envolve a receita unitária, utiliza-se também a restrição de projeção do modelo de maximização de lucro exposta por Zhu (2003), pois assim, o custo de cada período também deve ser inferior ao observado, indicando que se a empresa mantivesse a mesma gestão (sem antecipação de custos para ter custos menores no período desejado em análise), ela ainda assim poderia ter diminuído os seus custos (a gestão/controlado não foi eficiente).

Com todas as variáveis e custos estimados, deve-se minimizar a função objetivo, que é a eficiência alocativa baseada na soma dos custos de estocagem e produção otimizados (as projeções estão expressas como $z_{g^0}^{-p}$, $z_{g^0}^{+p}$, $x_{j_0}^p$), divididos pelos reais observados:

$$\min \frac{C_{i_0} z_{g^0}^{-p} + C_{f_1} z_{g^0}^{+p} + C_{p_1} x_{j_0}^p}{C_{i_0} z_{g^0}^- + C_{f_1} z_{g^0}^+ + C_{p_1} x_{j_0}} \quad (9)$$

Sujeito a:

$$\text{Restrições de output: } \sum_{k=1}^w \lambda_k y_{ik} - S_i^+ = y_{i0}; \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\text{Restrições de input: } \sum_{k=1}^w \lambda_k x_{jk} + S_j^- = x_{j0}^p; \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\text{Restrições de ligação: } \sum_{k=1}^w \lambda_k z_{g^+k}^+ - S_{g^+}^+ = z_{g^+0}^{+p}; \quad g^+=1,2,\dots,t$$

$$\sum_{k=1}^w \lambda_k z_{g^-k}^- + S_{g^-}^- = z_{g^-0}^{-p}; \quad g^-=1,2,\dots,t$$

Restrições variacionais de controle (ou de diferença de estado):

$$x_{j0}^p - z_{j0}^{+p} + z_{j0}^{-p} = y_0$$

Restrições de valor inicial: $z_{g^-0}^{-p} = I_0$

Restrições de projeção: $x_{j0}^p \leq \tilde{x}_{j0}$

Para o cálculo das funções, variáveis, parâmetros e coeficientes, que incorpora características do modelo produção-estoque a tempo discreto dado pela Equação (3) de Sethi e Thompson (2006), assim como a restrição variacional por diferença, descrevendo a relação entre as variáveis demanda, produção e estoque, dadas pelas Equações (5) a (8), foram substituídas no modelo dado pela Equação (9), juntamente com as restrições, e foi utilizado o *software* MATLAB.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

As médias e desvios-padrão de cada variável podem ser observadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Médias e desvios padrão as variáveis do modelo proposto.

Medida	Receita	CPV	CEF	CEI	CPP
Média	5172478,49	3747363,72	1321481,70	1344118,23	3724727,19
Desvio-Padrão	23162094,99	17868458,68	3268373,35	3426840,12	17626649,51

Fonte: Elaborado pelos autores.

Conforme pode ser observado na Tabela 3, as empresas mais eficientes, considerando os 14 setores, são Toll Brothers e Targa Resources, dos EUA, setor de construção e mineração, e CEG, Lix da Cunha e PDG Realty, do Brasil, setor de Petróleo e Gás e Construção.

Tabela 3 – Empresas mais eficientes de acordo com modelo proposto (dados em milhares de dólares).

DMU	Setor	País	Efic.	CPV	CPP	CEF	CEI	Receita
Lix da Cunha	Construção	BR	1	88,51	97,00	95,82	87,33	3,93
Toll Brothers	Construção	US	1	712311	894845	7180050	6997516	928566
PDG Realty	Construção	BR	1	43773,08	84068,87	481431,06	441135,27	39277,87
Targa Resources	Mineração	US	1	1143100	1063800	61700	141000	1442400
Ceg	Petróleo e Gás	BR	1	163410,60	163529,61	591,76	472,75	223027,90

Fonte: Elaborado pelos autores.

O principal resultado, além do modelo estático em si com a inclusão das variáveis intermediárias e restrições variacionais de controle, é a solução ótima respeitar a relação entre as variáveis (tanto em quantidades, quanto em custos) do sistema de controle de estoque.

Vale a pena ressaltar que algumas empresas, como é o caso da Lix da Cunha, possuem um alto custo, mas os menores valores de *input* e de variáveis intermediárias, portanto, de acordo como o modelo foi formulado, ela foi considerada eficiente por causa dos valores baixos dessas variáveis, resultando em custo relativo menor do que das outras empresas e equivalente ao seu custo ótimo calculado. Isso pode ser considerado uma limitação do modelo proposto, mas pode-se sugerir a incorporação de metas e análise de erros de estimação para evitar tais situações.

Analisando os dados, observa-se que, entre as mais eficientes, estão 3 empresas do setor de construção e, no geral, este foi o setor mais eficiente do último trimestre, seguido pelos setores de Petróleo e Gás, Mineração, e o de Comércio. Apesar de não possuir nenhuma DMU tida como eficiente, na média o setor de Comércio possui DMUs entre as melhores (na média).

Já, entre os menos eficientes, estão os setores Têxtil, Máquinas industriais, Papel e Celulose, Agro e Pesca, e Minerais Não Metálicos. É importante ressaltar que alguns setores podem não ser considerados eficientes para este período (por causa da crise), mas podem ser eficientes quando analisados com mais períodos, por isso, pode-se sugerir um estudo dinâmico desses setores.

Uma outra observação pode ser feita acerca da classificação das DMUs em cada setor. Por exemplo, seguindo a classificação dada pelo *software*, o setor de Minerais Não Metálicos possui empresas heterogêneas, podendo não refletir a realidade do setor.

5. CONCLUSÕES

O modelo proposto pode ser considerado melhor para medir a eficiência de sistemas que possuem variáveis com relações entre si, pois essa relação entre as variáveis foi incorporada ao modelo DEA através de uma restrição usada na OCT. Essa restrição faz diferença no modelo, pois, por exemplo, um modelo padrão poderia sugerir para que as DMUs variassem apenas uma das variáveis separadamente, algo impossível de acontecer na realidade, pois essa relação chega a ser física (exemplo: é impossível aumentar o estoque sem variar a produção, nem a demanda).

Os resultados mostraram que, entre as cinco empresas eficientes, estão duas dos EUA e três do setor de construção. O modelo proposto é melhor para calcular a eficiência de sistemas de controle de estoque, por considerar uma relação entre as variáveis que ocorre na prática, mas possui limitações, portanto pode-se sugerir o desenvolvimento de novos modelos, como um modelo de penalização que considere metas na função objetivo (ou nas restrições, incorporada às variáveis), tanto em modelos estáticos como dinâmicos, podendo as metas serem estocásticas (exemplo: incluir estoque de segurança).

Outra sugestão é analisar as DMUs e os setores caso a caso, ou seja, fazer um estudo do porquê das DMUs eficientes possuírem aqueles valores e de um determinado setor, no geral, ser mais eficiente do que outro (como o caso da Lix da Cunha e do setor de construção, nesse primeiro semestre de 2016) e do porquê de uma determinada DMU ser quase eficiente (ela pode ter sido afetada pela crise apenas nesse último período).

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, A. M. P.; NETO, A. A. **Aprendendo a contabilidade**: Como entender o processo contábil, como interpretar as demonstrações contábeis, como aplicar a contabilidade em negócios. Ribeirão Preto: Inside Books, 2010.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. Programming with linear fractional functionals. **Naval Research Logistics Quarterly**, 15, p. 333-334, 1962.

_____. An Explicit General Solution in Linear Fractional Programming. **Naval Research Logistics Quarterly**, 20, p. 449-467, 1973.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. **European Journal of Operational Research**, 2, p. 429-444, 1978.

CHEN, Y.; LIAN, L.; YANG, F.; ZHU, J. Evaluation of information technology investment: a data envelopment analysis approach. **Computers & Operations Research**, v. 33, n. 5, p. 1368-1379, 2006.

COOK, W. D.; KRESS, M.; SEIFORD, L. M. Prioritization models for frontier decision making units in DEA. **European Journal Of Operational Research**. North-holland, p. 319-323, jul. 1992.

DESPOTIS, D. K.; KORONAKOS, G.; SOTIRO, D. Composition versus decomposition in two-stage network DEA: a reverse approach. **Journal of Productivity Analysis**. v. 45, p. 71-87, 2016.

FALLAH-FINI, S.; TRIANTIS, K.; JOHNSON, A. L. Reviewing the literature on non-parametric dynamic efficiency measurement: State-of-the-art. **Journal of Productivity Analysis**. v. 41, p. 51-67, 2014.

FARREL, M. J. The measurement of Productive Efficiency. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 120, n. 3, p. 253-290, 1957.

FERREIRA, C. M. C.; GOMES, A. P. **Introdução à Análise Envoltória de Dados: Teoria, Modelos e Aplicações**. Editora: UFV, Viçosa-MG, 2009.

GODINHO FILHO, M.; FERNANDES, F. C. F. **Planejamento e controle da produção: dos fundamentos ao essencial**. São Paulo: Atlas, 2010.

GOLANY, B.; ROLL, Y. An Application Procedure for DEA. **Omega**. Londres, v. 17, n. 3, p. 237-250, 1989.

HATEFI, S. M.; JOLAI, F.; IRANMANESH, H.; KOR, H. A New DEA Model for Classification Intermediate Measures and Evaluating Supply Chain and its members. **International Conference on Computer Engineering and Technology**, 2009.

HOLT, C. C.; MODIGLIANI, F.; MUTH, J. F.; SIMON, H. A. **Planning Production, Inventories, and Work Force**. New Jersey: Prentice-Hall, 1960.

HUA, Z.; HE, P. An Approach to Judge Homogeneity of Decision Making Units. In: POMS INTERNATIONAL CONFERENCE. **Anais...** Shangai, República da China, 18 p. 2006.

KAO, C.; HWANG, S. N. Efficiency measurement for network systems: IT impact on firm performance. **Decision Support Systems**, v. 48, p. 437-446, 2010.

LIANG, L.; COOK, W. D.; ZHU, J. DEA models for two-stage processes: Game approach and efficiency decomposition. **Naval Research Logistics**, v. 55, n. 7, p. 643-653, 2008.

MIGUEL, P. A. C. (Org.). **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

SENGUPTA, J. K. A dynamic efficiency model using data envelopment analysis. **International Journal of Production Economics**, v. 62, p. 209-218, 1999.

SETHI, S. P.; THOMPSON, G. L. **Optimal control theory: applications to management science and economics**. New York: Springer, 2006.

SUEYOSHI, T.; GOTO, M. Environmental assessment for corporate sustainability by resource utilization and technology innovation: DEA radial measurement on Japanese industrial sectors. **Energy Economics**, v. 46, p. 295-307, 2014.

THOMPSON, G. L.; SETHI, S. P. Turnpike Horizons for Production Planning. **Management Science**, v. 26, n. 3, p. 229-241, 1980.

TONE, K. A slack-based measure of efficiency in data envelopment analysis. **European Journal of Operational Research**, 130, 498-509, 2001.

TONE, K.; TSUTSUI, M. Dynamic DEA: A slacks-based measure approach. **Omega**, v. 38, p. 145 - 156, 2010

_____. Dynamic DEA with network structure: A slacks-based measure approach. **Omega**, v. 42, p. 124 - 131, 2014.

ZHU, J. **Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: Data Envelopment Analysis with Spreadsheets**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.