

Recebido em: 17/05/10

Aprovado em: 22/08/10

# Avaliação de derivativos complexos: uma aplicação do método de simulação dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo com diversas bases polinomiais

Ursula S.M. de Lima (DEI-PUC-Rio) - urssml@ig.com.br

• R. Marquês de São Vicente, 225, Gávea, CEP 22453-900, Rio de Janeiro-RJ

Carlos P. Samanez (DEI-PUC-Rio) - cps@puc-rio.br

## Resumo

Este trabalho tem por objetivo expandir a aplicação do Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo, em diferentes bases polinomiais – Potência, Laguerre, Legendre e Hermite A – para a precificação de Opções Asiáticas Americanas (*Amerasian*), tanto em sua modalidade de compra quanto em sua modalidade de venda. Reitera a possibilidade de utilização alternativa das bases polinomiais, além de verificar a convergência em cada um dos experimentos, sem perder de vista a possibilidade de que haja, para cada tipo de *Amerasian* precificada, uma base polinomial específica que, marginalmente, mostra-se mais precisa.

Palavras-chave: Precificação de Derivativos Complexos; Opções Asiáticas Americanas; Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo; Bases Polinomiais.

## Abstract

*This working paper intent to expand Least Squares Method's application by using different polynomials as basis function – Power, Laguerre, Legendre and Hermite A – to value many types of American Asian Options. Main results ratify the possibility of alternating usage of polynomials as basis function and all over experiments, there are converge feature. At last, there is evidence that may be possible to elect “an appropriate choice” of basis function to a specific American Asian Option's valuation because of best marginal precision.*

*Keywords: Complex Derivatives Valuation; Least Squares Method; American Asian Options; Polynomial Basis.*

## 1. INTRODUÇÃO

As Opções Asiáticas podem ser usadas para operações de *hedge* de fluxo de caixa, em empresas que tenham sua programação de compras definida em planejamento, de modo a minorar o efeito das flutuações nos preços das matérias-primas. Sua versatilidade é atestada graças a sua presença em mercados, como os de *commodities*, energia, taxa de juros e de moedas (MCDONALD, 2006).

Sendo opções complexas (ou exóticas), as Opções Asiáticas geralmente são negociadas no mercado de balcão. As características de seu contrato (objeto, prêmio, preço de exercício, prazos e vencimento) são livremente pactuadas entre as partes, o que ressalta a sua não padronização.

Nesse sentido, as técnicas tradicionais, como o método de diferenças finitas e *lattice* tornam-se pouco atrativas, se estamos lidando com a precificação de derivativos com múltiplas variáveis estocásticas, problemas com muitas dimensões ou mesmo Opções Americanas do tipo *path dependent*, como é o caso da Opção Asiática Americana (*Amerasian*).

As técnicas mais flexíveis na precificação de opções exóticas do tipo Americano utilizam-se da simulação estocástica, combinada com um algoritmo de otimização. Dentre estas técnicas, temos o método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo, apresentado inicialmente por Longstaff & Schwartz (2001), que permite avaliar opções Americanas do tipo *path dependent*, com múltiplas dimensões e com múltiplas variáveis de estado, sendo também, aplicável a problemas *markovianos* e não *markovianos*, tendo velocidade no processamento computacional e uma boa precisão.

Neste trabalho, aplica-se intensivamente o método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo na valoração de diversos tipos de Opções Asiáticas Americanas (*Amerasian*), testando a sua precisão, com diferentes bases polinomiais.

## 2. O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS DE MONTE CARLO

A cada instante anterior à expiração de uma Opção Americana, o titular deve decidir de maneira ótima, entre exercer a opção, ou continuar com esta em carteira, por mais um período. Para tanto, compara-se o *payoff* de exercício imediato com o *payoff* esperado de continuação. Caso o *payoff* de exercício imediato seja maior que o *payoff* esperado de continuação, então a opção é exercida.

Sob a hipótese de não arbitragem, o valor de continuidade ou de continuação é a expectativa neutra ao risco dos fluxos de caixa futuros descontados, ou seja:

$$F(\omega; t_k) = E^Q \left[ \sum_{j=k+1}^K \exp \left( - \int_{t_k}^{t_j} r(\omega, s) ds \right) C(\omega, t_j; t_k, T) \mid \mathfrak{S}_{t_k} \right] \quad (1.1)$$

Onde,

$F(\omega; t_k)$  é o valor de continuação da opção no instante  $t_k$  na trajetória  $\omega$ ;

$E^Q$  é o operador esperança sob medida  $Q$ ;

$Q$  é a medida de probabilidade neutra ao risco;

$r(\omega, s)$  é a taxa de juros livre de risco no instante  $t$  da trajetória  $\omega$ ;

$C(\omega, t_j; t_k, T)$  é fluxo de caixa obtido no instante  $t_j > t_k$  e na trajetória  $\omega$ ; e

$\mathfrak{S}_{t_k}$  é o conjunto de informações disponível no instante  $t_k$ .

A idéia subjacente ao Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo reside em aproximar, a cada instante de tempo em que o exercício é possível, o valor de continuação, através da utilização da regressão de mínimos quadrados. Assim, a regressão é feita a partir dos dados obtidos para as variáveis de estado, via simulação de Monte Carlo, selecionando-se as trajetórias em que a opção está *in the money*.

Sendo assim, a cada instante em que há a possibilidade de exercício, o valor de continuação pode ser expresso como uma combinação linear de funções de bases ortogonais, tais como os polinômios de Potência, Legendre, Laguerre e outros.

Isto se baseia no fato de que, na literatura financeira, convencionou-se considerar funções de *payoff* que pertencem ao espaço das funções de variância finita, denotado por  $L^2(\Omega, \mathfrak{S}, Q)$ <sup>1</sup> o qual, por ser um espaço de Hilbert<sup>2</sup>, usufrui da propriedade de que qualquer função  $F$  pertencente a este espaço, pode ser escrita como uma combinação linear de funções de base ortogonal (STENTOFT, 2004).

Logo, pode-se reescrever a mesma função  $F$  da seguinte forma:

$$F(\omega; t_k) = \sum_{j=0}^N \alpha_j \Phi_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

- 1 Onde,  $\Omega$  é o conjunto de todos os *paths* possíveis;  $\mathfrak{S}$  é a filtração dos eventos em determinado instante de tempo; e  $Q$  é a medida de probabilidade neutra ao risco dos elementos de  $\mathfrak{S}$ .
- 2 Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial munido de um produto interno e completo em relação à norma definida por esse produto interno. (LIMA, 2007)

Onde a base polinomial é representada por  $\Phi_j$ , a qual está em função de uma das variáveis de estado. Observa-se que os coeficientes das bases,  $\alpha_j$ , não são conhecidos *a priori*, mas podem ser estimados, através do uso da regressão linear dos dados obtidos, via simulação, o que nos remete à essência do método.

Ao considerarmos o número de bases a serem usadas, deve-se ressaltar um problema levantado por Moreno e Navas (2003). Estes autores analisaram que a utilização de um elevado número de bases e, portanto, diversos graus do polinômio escolhido e seus respectivos produtos cruzados, podem, até determinado ponto, aumentar a precisão da estimativa. Porém, em alguns casos, o aumento acentuado do número de bases utilizadas pode diminuir a precisão do método, tornando-o computacionalmente custoso.

### 3. METODOLOGIA

No presente trabalho, o método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo é aplicado em quatro casos distintos de Opções Asiáticas Americanas *Fixed-Started*<sup>3</sup>: Caso 1 – Opção Asiática Americana *Floating Strike* Aritmética; Caso 2 – Opção Asiática Americana *Floating Strike* Geométrica; Caso 3 – Opção Asiática Americana *Fixed Strike* Aritmética; e Caso 4 – Opção Asiática Americana *Fixed Strike* Geométrica.

Para tanto, é utilizada a Opção Asiática Bermuda, como uma aproximação discreta da Opção Asiática Americana (*Amerasian*); portanto, o preço do ativo objeto é observado mensalmente. Todas as opções precificadas têm prazo de um ano, sendo permitido seu exercício, a partir do terceiro mês de sua emissão. Assume-se que o preço do ativo objeto segue um movimento geométrico browniano neutro ao risco.

Suas respectivas funções de *payoff* são formalmente expressas abaixo. Sendo assim, definamos as variáveis que se seguem dadas as considerações feitas. Seja:

$t_i \equiv$  instante de tempo referente ao mês  $i$ , em que  $i = 1, 2, \dots, 12$ .

$S_i \equiv$  preço do ativo básico observado no  $i$ -ésimo mês da série de preços.

$\overline{S}_i \equiv$  média da série de preços até o instante  $i$ . Esta pode ser aritmética ou geométrica.

$$\overline{A}_{(i)} = \frac{\sum_{j=1}^i S_j}{i} \equiv \text{média aritmética computada no instante } i.$$

$$\overline{G}_{(i)} = \left( \prod_{j=1}^i S_j \right)^{1/i} \equiv \text{média geométrica computada no instante } i.$$

$K \equiv$  preço de exercício (ou *strike price*).

3 *Fixed-Started* são opções asiáticas cujo número de elementos componentes da média aumenta no decorrer da passagem de tempo, tendo seu início fixo em algum ponto da linha tempo.

$$\text{payoff}_{\text{Strike Aritmética}}^{\text{Floating}} = \max \left\{ \eta \left[ S(t_i) - \overline{A}_{(i)} \right], 0 \right\}, \text{ onde } \eta = 1 \Rightarrow \text{call}, \eta = -1 \Rightarrow \text{put} \quad (1.3)$$

$$\text{payoff}_{\text{Strike Geométrica}}^{\text{Floating}} = \max \left\{ \eta \left[ S(t_i) - \overline{G}_{(i)} \right], 0 \right\}, \text{ onde } \eta = 1 \Rightarrow \text{call}, \eta = -1 \Rightarrow \text{put} \quad (1.4)$$

$$\text{payoff}_{\text{Strike Aritmética}}^{\text{Fixed}} = \max \left\{ \eta \left[ \overline{A}_{(i)} - K \right], 0 \right\}, \text{ onde } \eta = 1 \Rightarrow \text{call}, \eta = -1 \Rightarrow \text{put} \quad (1.5)$$

$$\text{payoff}_{\text{Strike Geométrica}}^{\text{Fixed}} = \max \left\{ \eta \left[ \overline{G}_{(i)} - K \right], 0 \right\}, \text{ onde } \eta = 1 \Rightarrow \text{call}, \eta = -1 \Rightarrow \text{put} \quad (1.6)$$

Seguindo o sugerido por Longstaff e Schwartz (2001), a estrutura usada nas regressões é composta de uma constante, dos dois primeiros graus do polinômio e do produto cruzado destes até o terceiro grau, totalizando oito bases. Os polinômios utilizados são os de Potência, Legendre, Laguerre e Hermite A. Formalmente,

$$F(S_i, \overline{S}_i) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \Phi_1(S_i) + \alpha_3 \cdot \Phi_1(\overline{S}_i) + \alpha_4 \cdot \Phi_2(S_i) + \alpha_5 \cdot \Phi_2(\overline{S}_i) + \alpha_6 \cdot \Phi_1(S_i) \cdot \Phi_1(\overline{S}_i) + \alpha_7 \cdot \Phi_1(S_i) \cdot \Phi_2(\overline{S}_i) + \alpha_8 \cdot \Phi_2(S_i) \cdot \Phi_1(\overline{S}_i) \quad (1.7)$$

Neste trabalho, a simulação de Monte Carlo foi executada com a utilização de sequências de números pseudo-aleatórios; e a técnica de redução de variância usada é a de variáveis antitéticas. Os dados iniciais usados são:  $S(t_0)=K=100$ ;  $\sigma=20\%$ ;  $r=5\%$ . As rotinas foram programadas e executadas em MATLAB 6.5.

### 3.1. Bases polinomiais utilizadas

Tal como mencionado, os polinômios usados nos experimentos são os de Potência, Legendre, Laguerre e Hermite A, os quais podem ser expressos, alternativamente através da fórmula de Rodrigues, da forma explícita ou da lei de recorrência (ABRAMOWITZ e STEGUN, 1972).

Considerando a fórmula de Rodrigues para escrever um polinômio tem-se que:

$$f_n(x) = \frac{1}{a_n \cdot \rho(x)} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} [\rho(x) \cdot (g(x))^n] \quad (1.8)$$

Onde  $n$  denota o grau do polinômio ( $n \geq 0$ ).

Para cada um dos polinômios usados, os coeficientes e funções que constam da fórmula de Rodrigues, encontram-se na tabela 1.

Tabela 1 – Coeficientes e funções da fórmula de Rodrigues para os polinômios considerados.

	$f_n(x)$	$a_n$	$\rho(x)$	$g(x)$
Potência	$W_n(x)$	$(2.n)!/n!$	$x^{2n}$	1
Legendre	$P_n(x)$	$(-1)^n . 2^n . n!$	1	$1 - x^2$
Laguerre	$L_n(x)$	$n!$	$e^{-x}$	$x$
Hermite A	$H_n(x)$	$(-1)^n$	$e^{-x^2}$	1

Alternativamente, pode-se usar a forma explícita, dada por:

$$f_n = d_n \sum_{m=0}^N c_m \cdot g_m(x) \quad (1.9)$$

Assim como anteriormente, cada um de seus termos difere de acordo com o polinômio considerado, o que é mostrado na tabela 2.

Tabela 2 – Coeficientes e funções da forma explícita.

	$f_n(x)$	$N$	$d_n$	$c_m$	$g_m(x)$
Potência	$W_n(x)$	0	1	1	$x^n$
Legendre	$P_n(x)$	$[n / 2]$	$2^{-n}$	$(-1)^m \cdot \binom{n}{m} \cdot \binom{2n-2m}{n}$	$x^{n-2m}$
Laguerre	$L_n(x)$	$n$	1	$\frac{(-1)^m}{m!} \cdot \binom{n}{n-m}$	$x^m$
Hermite A	$H_n(x)$	$[n / 2]$	$n!$	$(-1)^m \cdot \frac{1}{m!(n-2.m)!}$	$(2.x)^{n-2m}$

Ou, ainda, utilizar a lei de recorrência, descrita por:

$$a_{n+1} \cdot f_{n+1}(x) = (a_n + b_n \cdot x) \cdot f_n(x) - a_{n-1} \cdot f_{n-1}(x) \quad (1.10)$$

A tabela 3 especifica cada um dos termos da lei de recorrência.

Tabela 3 – Termos da lei de recorrência para os polinômios considerados.

	$f_n(x)$	$a_{n+1}$	$a_n$	$b_n$	$a_{n-1}$	$f_0(x)$	$f_1(x)$
Potência	$W_n(x)$	1	0	1	0	1	$x$
Legendre	$P_n(x)$	$n + 1$	0	$2.n + 1$	$n$	1	$x$
Laguerre	$L_n(x)$	$n + 1$	$2.n + 1$	-1	$n$	1	$1 - x$
Hermite A	$H_n(x)$	1	0	2	$2.n$	1	$2.x$

O formato usado para escrever um polinômio é escolhido de forma a tornar o procedimento de precificação operacionalmente mais prático, além do que, este procedimento mostrou-se eficaz, ao longo de todo o processo, já que excluiu a possibilidade de o *rank* da matriz dos coeficientes da regressão de mínimos quadrados ser insuficiente. Assim sendo, aplica-se a forma explícita para os polinômios de Potência e de Laguerre, usando a lei de recorrência para expressar o polinômio de Hermite A e, por fim, utiliza-se a fórmula de Rodrigues para escrever o polinômio de Legendre.

## 4. RESULTADOS

As tabelas 4, 5, 6 e 7 apresentam os preços médios das opções de compra (*call*) e de venda (*put*) para os quatro casos ou tipos de *Amerasian* estudadas.

Tabela 4 – Estimativa dos preços da *Amerasian Floating Strike* Aritmética, ao longo de diversos conjuntos de trajetórias simuladas (*NumSim* = número de simulações)

Caso 1 – Opção Asiática Americana <i>Floating Strike</i> Aritmética						
	<i>Put</i>					
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	5,1979	4,8606	4,7808	4,7143	4,7147	4,7204
Legendre	5,2130	4,8408	4,7788	4,7098	4,7174	4,7229
Laguerre	5,2938	4,8348	4,7848	4,7183	4,7229	4,7227
Hermite A	5,1864	4,8718	4,7642	4,7359	4,7296	4,7177
	<i>Call</i>					
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	3,1035	3,1133	3,1238	3,1105	3,1195	3,1199
Legendre	3,0762	3,0802	3,1373	3,1075	3,1243	3,1246
Laguerre	3,1406	3,1232	3,1316	3,1216	3,1286	3,1251
Hermite A	3,0371	3,1139	3,1224	3,1285	3,1395	3,1277

Tabela 5 – Estimativa dos preços da *Amerasian Floating Strike* Geométrica

Caso 2 – Opção Asiática Americana <i>Floating Strike</i> Geométrica						
<i>Put</i>						
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	5,0113	4,7120	4,6387	4,6285	4,6321	4,6238
Legendre	4,9925	4,6258	4,6852	4,6430	4,6296	4,6241
Laguerre	5,1817	4,7095	4,6570	4,6279	4,6275	4,6183
Hermite A	5,1508	4,7439	4,6589	4,6179	4,6219	4,6241
<i>Call</i>						
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	3,0561	3,1580	3,1711	3,1741	3,1833	3,1754
Legendre	3,0559	3,1726	3,1941	3,1795	3,1852	3,1757
Laguerre	3,0838	3,1368	3,1877	3,1653	3,1835	3,1750
Hermite A	3,0555	3,1449	3,1654	3,1580	3,1800	3,1769

Tabela 6 – Estimativa dos preços da *Amerasian Fixed Strike* Aritmética

Caso 3 – Opção Asiática Americana <i>Fixed Strike</i> Aritmética						
<i>Put</i>						
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	3,5465	3,5143	3,4976	3,4935	3,4948	3,4934
Legendre	3,6065	3,4713	3,5169	3,4960	3,5069	3,4912
Laguerre	3,4935	3,4877	3,5054	3,4866	3,4903	3,4931
Hermite A	3,4863	3,5643	3,5050	3,4848	3,4916	3,4931
<i>Call</i>						
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	2,0348	2,0746	2,0937	2,0867	2,0794	2,0780
Legendre	2,0410	2,0515	2,1043	2,0963	2,0786	2,0781
Laguerre	2,0418	2,0731	2,0841	2,0818	2,0890	2,0792
Hermite A	2,0653	2,0939	2,0909	2,0842	2,0859	2,0791

Tabela 7 – Estimativa dos preços da *Amerasian Fixed Strike* Geométrica

Caso 4 – Opção Asiática Americana <i>Fixed Strike</i> Geométrica						
<i>Put</i>						
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	3,5935	3,6128	3,6100	3,6111	3,6101	3,6134
Legendre	3,8037	3,6459	3,6152	3,6070	3,6047	3,6111
Laguerre	3,6569	3,6239	3,6555	3,6196	3,6082	3,6110
Hermite A	3,6336	3,6235	3,6327	3,5896	3,6170	3,6143
<i>Call</i>						
<i>NumSim</i>	100	500	1000	5000	10000	50000
Potência	1,9404	2,0312	2,0239	2,0319	2,0247	2,0290
Legendre	2,0443	2,0309	2,0368	2,0271	2,0264	2,0311
Laguerre	2,0183	2,0235	2,0451	2,0277	2,0280	2,0282
Hermite A	1,9812	2,0309	2,0369	2,0382	2,0306	2,0291

Verifica-se nas tabelas que, quando bases distintas são utilizadas, em todos os conjuntos de trajetórias simuladas tem-se uma diferença pequena entre as estimativas obtidas para o preço da opção. Essa mesma diferença torna-se ínfima, quando um número maior de trajetórias simuladas é usado.

Esse padrão repete-se não só para as opções de venda (*put*), como também, para as opções de compra (*call*) de todas as *Amerasian* estudadas. Este resultado indica duas conclusões fundamentais; a primeira vem corroborar um dos pilares teóricos do método: sendo todas as bases polinomiais ortogonais, então, em tese, todas elas podem ser indistintamente utilizadas na precificação do derivativo, fato este comprovado pelos resultados mostrados nas tabelas 4 a 7.

Outra conclusão, advinda da análise dessas tabelas, é que o decréscimo gradual da diferença entre as estimativas de preço, em cada uma das bases, dado o aumento paulatino do número de trajetórias simuladas, é resultado direto da lei dos grandes números.

O aumento do número de trajetórias simuladas diminui, sensivelmente, o desvio-padrão da estimativa de preço, para todas as bases utilizadas, caracterizando, portanto, a convergência da estimativa para seu valor verdadeiro. Este aspecto é consistente tanto para as opções asiáticas americanas de compra quanto para suas congêneres de venda.

Na sequência, por meio das figuras 1 e 2, verifica-se a convergência da estimativa ao longo de todos os conjuntos de trajetórias simuladas para cada um dos casos estudados dada a utilização das quatro bases polinomiais.

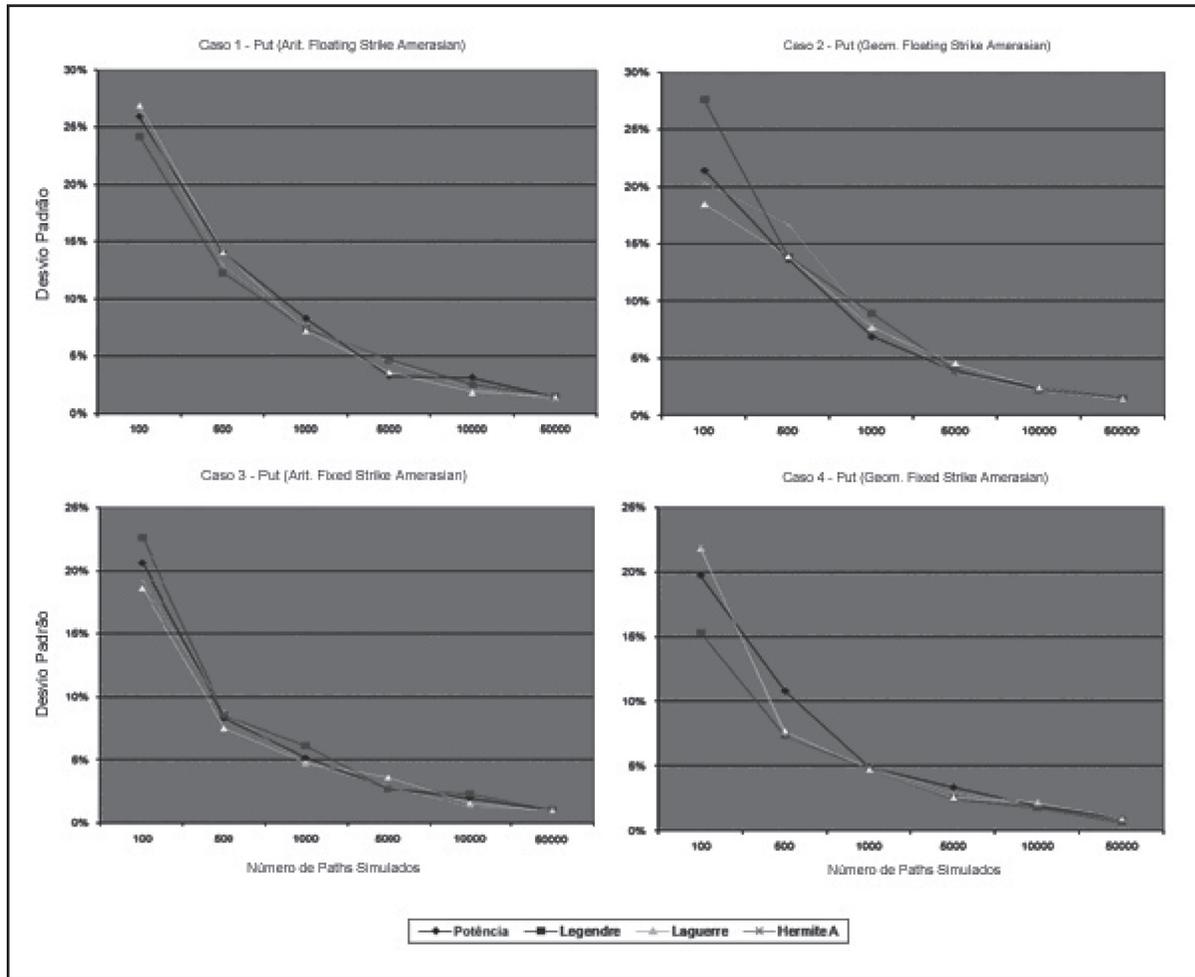


Figura 1 – Desvio padrão da opção de venda (*put*), em função do número de simulações.

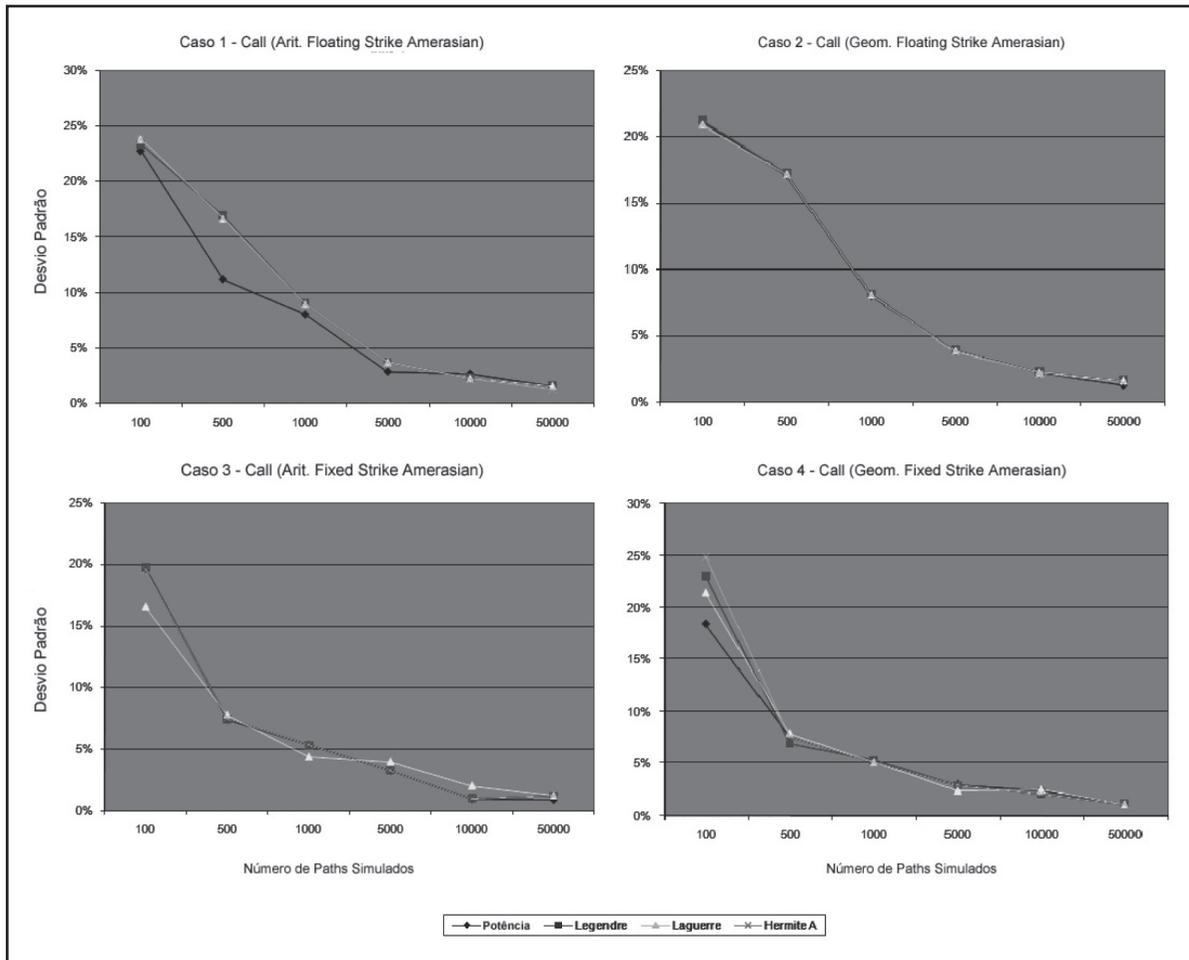


Figura 2 – Desvio padrão da opção de compra (*call*) em função do número de simulações

Na tabela 8, observa-se que os resultados sugerem certa uniformidade no que toca à base mais precisa. Isto se deve ao fato de que para três dos quatro dos casos (ou tipos) estudados há, dentre todas as bases, uma que apresenta o menor desvio padrão para a estimativa de preços.

Tabela 8 – Desvio padrão da estimativa com 50.000 *paths* simulados para todas as bases polinomiais e todos os tipos de *Amerasian*.

Opções Asiáticas Americanas Precificadas		Bases			
		Potência	Legendre	Laguerre	Hermite A
<i>Floating Strike</i> Aritmética	<i>Put</i>	1,2311%	1,3493%	1,3714%	1,5009%
	<i>Call</i>	1,3950%	1,4589%	1,4619%	1,1954%
<i>Floating Strike</i> Geométrica	<i>Put</i>	1,3363%	1,3560%	1,6667%	1,3560%
	<i>Call</i>	1,4736%	1,4746%	1,4336%	1,3428%
<i>Fixed Strike</i> Aritmética	<i>Put</i>	1,7160%	1,7489%	1,7968%	1,7954%
	<i>Call</i>	1,0105%	1,0093%	1,0048%	1,0019%
<i>Fixed Strike</i> Geométrica	<i>Put</i>	1,9197%	1,5011%	2,2860%	1,9770%
	<i>Call</i>	0,9541%	0,6708%	0,9581%	0,9179%

A tabela 8 mostra a vantagem relativa de uma das bases polinomiais, em comparação às outras, sugerindo que na precificação de Opções Asiáticas Americanas, usando o método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo, pode-se eleger uma base polinomial independentemente do tipo de *Amerasian*, mas dependente somente do fato de estarmos precificando uma *Amerasian* de venda (*Put*) ou de compra (*Call*).

Neste sentido, através da tabela 8, verifica-se que se o objeto de precificação é uma *Amerasian* de compra (*Call*), a base polinomial sugerida seria a de Hermite A. Por outro lado, caso fosse uma *Amerasian* de venda (*Put*), a base polinomial sugerida seria a de Potência.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização das quatro bases polinomiais apresentadas ratifica um dos elementos constituintes do método, ou seja, que se pode utilizar qualquer base polinomial ortogonal para a precificação das opções propostas, já que em todos os conjuntos de trajetórias simuladas, as estimativas de preço das opções é virtualmente o mesmo.

Para todas as *Amerasian* precificadas e em cada uma das bases utilizadas, verifica-se a convergência da estimativa de preço, através da diminuição de seu desvio padrão, ao passo em que o número de *paths* simulados aumenta.

Considerando o patamar de 50.000 trajetórias simuladas, tem-se a sinalização de que, empiricamente, pode-se eleger uma base polinomial específica, para a precificação de uma *Amerasian*, pois os resultados sugerem que, marginalmente, uma base polinomial é mais precisa que as outras. Este resultado empírico é teoricamente imprevisível, dado que a princípio, as bases podem ser utilizadas indistintamente quando da precificação do derivativo.

Sendo assim, em problemas práticos de engenharia financeira, na valoração de uma *Amerasian* de compra (*Call*), seria aconselhável utilizar a base polinomial de Hermite A, dada a sua maior precisão relativa. Pelo mesmo motivo, caso fosse uma *Amerasian* de venda (*Put*), a base polinomial mais eficiente seria a de Potência.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWITZ, W; STEGUN, I. **Handbook of Mathematical Functions with Formula, Graphs and Mathematical Tables**. New York: Dover Publications, 1972.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 4<sup>th</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

LONGSTAFF, F. A.; SCHWARTZ, E. S. Valuing American Options By Simulation: A Sample Least-Square Approach. **The Review of Financial Studies**, v.14, n°.1, 2001, pp. 113-147.

MCDONALD, R. L. **Derivative Markets**. 2<sup>nd</sup> ed. Boston: Addison Wesley, c2006.

MORENO, M; NAVAS, J. F. On the Robustness of Least-Squares Monte Carlo (LSM) for Pricing American Derivatives. **Review of Derivatives Research**, v.6, 2003, pp. 107-128.

STENTOFT, L. Convergence of the Least Squares Monte Carlo Approach to American Option Valuation. **Management Science**, v. 50, 2004, pp. 1193-1203.

